

СВЯЗЬ МЕЖДУ ТВЁРДОСТЬЮ И МОДУЛЕМ УПРУГОСТИ РЕЗИН

У статті пропонується формула, для обчислення величини модулів пружності гум за відомими величинами їх твердості А по Шору.

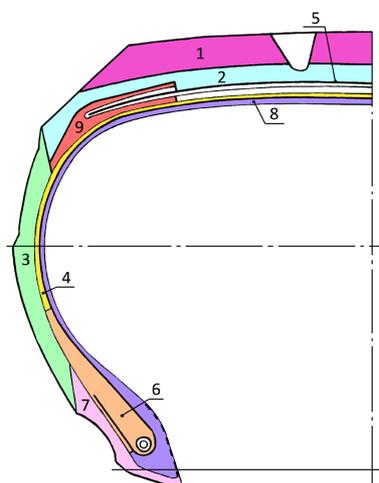
CONNECTION BETWEEN HARDNESS AND A MODULUS OF GUMS

In a paper the formula, allowing to evaluate quantity of elastic modules of gums on known quantities of their Shore A hardness is offered.

Преамбула. Для расчёта напряжённно-деформированного состояния и жесткостных свойств пневматической шины необходимо знать упругие характеристики её материалов, в том числе и модули упругости резин.

Что следует понимать под модулем упругости резины можно найти в опубликованных ранее работах [1-3]. Что же касается «секущего модуля резины» и «касательного модуля резины», то они, вообще говоря, неприемлемы для инженерной практики, а, именно, для расчётов напряжённно-деформированного состояния и прочности шины.

К сожалению, лучшие зарубежные изготовители шин в качестве единственного технологического показателя изделия часто приводят лишь твёрдости А по Шору для резин, используемых в элементах (деталях) шины (рис. 1).



Позиция	Элементы шины TRX 190/65HR390	Твердость А по Шору
1	Протектор	65
2	Подканавочный слой	62
3	Боковина	55
4	Обрезинка радиальных текстильных слоев каркаса	60
5	Обрезинка металлокордного слоя брекера	80
6	Наполнитель борта	88-90
7	Резина на подошву борта	75
8	Гермослой	50
9	Капсула на конец брекера	55

Рис. 1 – Меридиональное сечение натурального образца шины «Мишлен» TRX 190/65HR390

Данные о твёрдости А по Шору резин в деталях шин ведущих зарубежных фирм можно также найти в публикуемых испытательной лабораторией Смизерс материалах. Однако в специальной отечественной литературе отсутствуют соотношения между твёрдостью А по Шору и модулем упругости резин. Это не позволяет инженеру-конструктору отечественных шин проводить сопоставительные расчёты напряжённно-деформированного состояния и жесткостных свойств лучших образцов зарубежных шин с соответствующими образцами отечественных шин. Такое положение дел ограничивает возможности инженера-конструктора при проектировании в выборе детерминированного образца (варианта) шины, в котором достигался бы оптимальный баланс характеристик шины при минимальных затратах на её изготовление.

В настоящей работе предлагается формула, позволяющая вычислять величины модулей упругости резин по известным величинам их твёрдости А по Шору.

Для получения этой формулы использованы известные решения задач Буссинеска и Герца, поскольку резина может рассматриваться [1-3] как квазиоднородный изотропный материал, а также ГОСТ 263-75, устанавливающий метод определения твёрдости А резины по Шору [4].

Отметим, что испытание резин с помощью портативного твердомера Шора стандартизовано во многих странах [5-7]. Наш стандарт [4] практически не отличается от стандартов [5-7].

Действие сосредоточенной силы на плоскую границу полубесконечного тела. Под этим названием известна задача Буссинеска о перемещениях и напряжениях, возникающих в

упругом изотропном теле, ограниченного плоскостью $x_3 = 0$, от действия сосредоточенной нормальной силы N , которая приложена в начале координат O и направлена вдоль оси x_3 (рис. 2).

Сформулированную таким образом задачу Буссинеска можно назвать задачей о действии нормальной сосредоточенной силы N на плоскую границу полубесконечного изотропного тела.

От силы N перемещения и компоненты тензора напряжений будут неограниченно возрастать при радиус-векторе $r \rightarrow 0$. Таким образом, начало координат в этой задаче представляет собой особую точку. Следовательно, рассматривать решение этой задачи с позиций теории упругости имеет смысл для всех точек тела кроме начала координат.

Буссинеск изящно исключил эту особую точку из рассмотрения, приняв начало координат в центре полусферической полости малого радиуса $r = r_0$. Иными словами он исключил эту особую точку из рассмотрения путём удаления части объёма тела, заключённого в полусфере малого радиуса $r = r_0$ с центром в начале координат (рис. 2).

При выборе величины радиуса r_0 следует исходить из того, чтобы напряжения в точках этой полусферической поверхности не превосходили предела упругости материала тела.

Если все линейные размеры рассматриваемого упругого изотропного тела велики по сравнению с размерами той площадки плоскости $x_3 = 0$, по которой приложена сила N , как это есть на самом деле по условию задачи, то можно считать, что тело ограничено бесконечной плоскостью и поверхностью малой полусферы.

Уравнения упругого равновесия Ламе имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \mu \cdot \nabla^2 u_1 + (\lambda + \mu) \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} &= 0; \\ \mu \cdot \nabla^2 u_2 + (\lambda + \mu) \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} &= 0; \\ \mu \cdot \nabla^2 u_3 + (\lambda + \mu) \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В уравнениях (1) введены следующие обозначения

$$\Delta = u_{i,j} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \text{div } u; \quad \nabla^2 u_i = u_{i,jj} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}; \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где λ, μ – коэффициенты Ламе;
 E – модуль упругости;
 ν – коэффициент Пуассона.

Дифференциальные уравнения (1) представляют собой уравнения упругого равновесия в перемещениях. Они выражают условия равновесия каждого элемента тела в зависимости от функций $u_i(x_k)$ и $\Delta(x_k)$, характеризующих деформированное состояние тела, и при этом учитывают соотношения между напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} для однородного изотропного тела. Можно сказать, что эти уравнения отражают геометрическую, статическую и физическую стороны задачи теории упругости.

Буссинеск дал следующее решение уравнений (1)

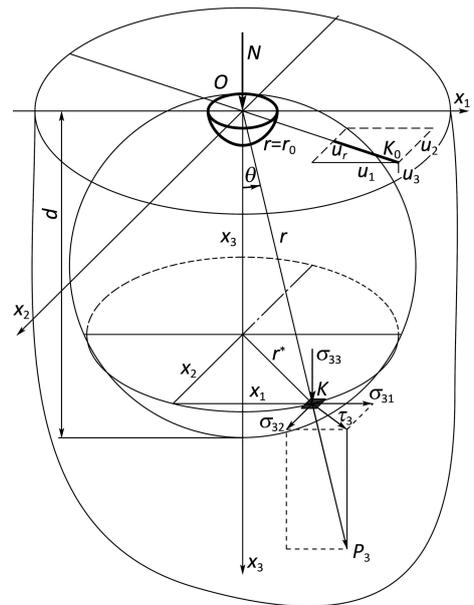


Рис. 2 – Перемещения и напряжения в упругом изотропном теле от действия сосредоточенной силы N

$$u_1 = \frac{N}{4\pi\mu} \left[\frac{x_3 x_1}{r^3} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{x_1}{r(r+x_3)} \right]; \quad u_2 = \frac{N}{4\pi\mu} \left[\frac{x_3 x_2}{r^3} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{x_2}{r(r+x_3)} \right];$$

$$u_3 = \frac{N}{4\pi\mu} \left[\frac{x_3^2}{r^3} + \frac{\lambda + 2\mu}{(\lambda + \mu) \cdot r} \right]. \quad (3)$$

Упругие перемещения (3) вызываются в теле системой сил, приложенных к внутренней стороне полусферы малого радиуса r_0 , описанной из начала координат. Эта система сил статически эквивалентна одной равнодействующей силе N , приложенной в начале координат и направленной по положительной оси x_3 . Вся же остальная граница упругого тела будет свободна, от каких бы то ни было приложенных сил.

На бесконечном удалении от начала координат при очень большом возрастании радиус-вектора r упругие перемещения u_1, u_2, u_3 , данные формулами (3), будут стремиться к нулю. Таким образом, решения (3) во всех точках упругого тела, не лежащих слишком близко к началу координат, дают упругие перемещения, которые получаются при действии в начале координат давления N .

Допустимость замены системы сил на внутренней поверхности полусферы их равнодействующей обусловлена возможностью применения к рассматриваемой задаче принципа Сен-Венана.

Перемещения произвольной точки K_0 (рис. 2), принадлежащей граничной плоскости $x_1 O x_2$, определяются выражениями, которые получаются из (3) при $x_3 = 0$

$$u_1 = -\frac{N}{4\pi(\lambda + \mu)} \cdot \frac{x_1}{r^2}; \quad u_2 = -\frac{N}{4\pi(\lambda + \mu)} \cdot \frac{x_2}{r^2}; \quad u_3 = \frac{N(\lambda + 2\mu)}{4\pi\mu(\lambda + \mu) \cdot r}. \quad (4)$$

Из первых двух равенств (4) следует, что точка K_0 (рис. 2) смещается в плоскости $x_3 = 0$ к началу координат O по линии $K_0 O$ на величину

$$u_r = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \frac{N}{4\pi(\lambda + \mu) \cdot r}, \quad (5)$$

а последнее равенство (4) определяет вертикальное смещение точки K_0 , которое с учётом (2) можно представить так

$$u_3 = [N(1 - \nu^2)] / (\pi E r). \quad (6)$$

Из формулы (6), называемой формулой Буссинеска, следует, что для всех точек плоскости $x_3 = 0$

$$u_3 \cdot r = [N(1 - \nu^2)] / (\pi E) = \text{const}. \quad (7)$$

Иными словами, радиусы OK_0 (рис. 2), проведенные в плоскости $x_3 = 0$ из начала координат, после деформации становятся гиперболами в плоскости $K_0 O x_3$.

Компоненты тензора напряжений в произвольной точке K (рис. 2) полубесконечного изотропного тела, обусловленные действием сосредоточенной силы N на его плоскую границу, записываются так

$$\sigma_{11} = \frac{N}{2\pi} \left\{ \frac{x_3}{r^3} \left[(1 - 2\nu) - 3 \left(\frac{x_1}{r} \right)^2 \right] - (1 - 2\nu) \left[\frac{x_2^2 + x_3^2}{r^3(r+x_3)} - \frac{x_1^2}{r^2(r+x_3)^2} \right] \right\};$$

$$\sigma_{22} = \frac{N}{2\pi} \left\{ \frac{x_3}{r^3} \left[(1 - 2\nu) - 3 \left(\frac{x_2}{r} \right)^2 \right] - (1 - 2\nu) \left[\frac{x_1^2 + x_3^2}{r^3(r+x_3)} - \frac{x_2^2}{r^2(r+x_3)^2} \right] \right\};$$

$$\sigma_{33} = -\frac{3N}{2\pi} \cdot \frac{x_3^3}{r^5}; \quad \sigma_{12} = \frac{N}{2\pi} \left[(1 - 2\nu) \frac{x_1 x_2 (2r + x_3)}{r^3(r+x_3)^2} - 3 \frac{x_1 x_2 x_3}{r^5} \right];$$

$$\sigma_{31} = -\frac{3N}{2\pi} \cdot \frac{x_3^2 x_1}{r^5}; \quad \sigma_{32} = -\frac{3N}{2\pi} \cdot \frac{x_3^2 x_2}{r^5}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что в произвольной точке K на горизонтальной площадке (рис. 2) возникают напряжения

$$\sigma_{33} = -\frac{3N}{2\pi} \cdot \frac{x_3^3}{r^5}; \quad \sigma_{31} = -\frac{3N}{2\pi} \cdot \frac{x_3^2 x_1}{r^5}; \quad \sigma_{32} = -\frac{3N}{2\pi} \cdot \frac{x_3^2 x_2}{r^5}. \quad (9)$$

Полное касательное напряжение τ_3 в точке K направлено по радиусу $r^* = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и равно

$$\tau_3 = \sqrt{\sigma_{31}^2 + \sigma_{32}^2} = \frac{3N}{2\pi} \cdot \frac{x_3^2 r^*}{r^5}, \quad (10)$$

а вектор полного напряжения P_3 направлен (рис. 2) по линии OK и его модуль равен

$$|P_3| = \sqrt{\sigma_{33}^2 + \tau_3^2} = \frac{3N}{2\pi} \cdot \frac{x_3^2}{r^5} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{3N}{2\pi} \cdot \frac{x_3^2}{r^4} = \frac{3N}{2\pi r^2} \cos^2 \theta, \quad (11)$$

ибо

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \cos \theta = \frac{x_3}{r}. \quad (12)$$

Представим себе (рис. 2) сферическую поверхность диаметра d , проходящую через начало координат, касаясь плоскости $x_3 = 0$, и произвольную точку K . Для любой точки (в том числе и K) этой сферической поверхности имеем $r = d \cos \theta$ и, следовательно, в каждой из них модуль вектора полного напряжения P_3 на горизонтальной площадке будет один и тот же, равный величине

$$|P_3| = \frac{3N}{2\pi d^2}. \quad (13)$$

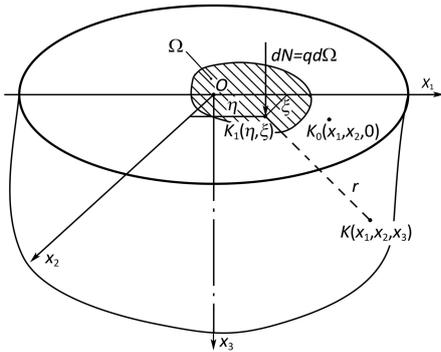


Рис. 3 – Действие распределенной нагрузки

Действие распределённой нагрузки на плоскую границу полубесконечного изотропного тела. Располагая решением при действии сосредоточенной силы на плоскую границу полубесконечного тела, можно теперь с помощью принципа суперпозиции найти перемещения и напряжения, вызванные распределённой нагрузкой, действующей на некоторой части Ω плоской границы полубесконечного изотропного тела (рис. 3).

Пусть в произвольной точке $K_1(\eta, \xi)$ площадки Ω интенсивность распределённой нагрузки равна $q(\eta, \xi)$. Тогда от действия элементарной силы $dN = q(\eta, \xi) \cdot d\eta \cdot d\xi = q \cdot d\Omega$ перемещения произвольной точки $K(x_1, x_2, x_3)$ определяются формулами (3), а от действия всей распределённой нагрузки – выражениями

$$u_1 = \frac{1}{4\pi\mu} \iint_{\Omega} \left[\frac{x_3 x_1}{r^3} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{x_1}{r(r + x_3)} \right] q \cdot d\Omega; \quad u_2 = \frac{1}{4\pi\mu} \iint_{\Omega} \left[\frac{x_3 x_2}{r^3} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \cdot \frac{x_2}{r(r + x_3)} \right] q \cdot d\Omega; \quad (14)$$

$$u_3 = \frac{1}{4\pi\mu} \iint_{\Omega} \left[\frac{x_3^2}{r^3} + \frac{\lambda + 2\mu}{r(\lambda + \mu)} \right] q \cdot d\Omega$$

или, заменив коэффициенты Ляме техническими упругими константами в соответствии с (2), получим

$$u_1 = \frac{1+\nu}{2\pi E} \iint_{\Omega} \left[\frac{x_3 x_1}{r^3} - (1-2\nu) \cdot \frac{x_1}{r(r + x_3)} \right] q \cdot d\Omega; \quad u_2 = \frac{1+\nu}{2\pi E} \iint_{\Omega} \left[\frac{x_3 x_2}{r^3} - (1-2\nu) \cdot \frac{x_2}{r(r + x_3)} \right] q \cdot d\Omega; \quad (15)$$

$$u_3 = \frac{1+\nu}{2\pi E} \iint_{\Omega} \left[\frac{x_3^2}{r^3} + \frac{2(1-\lambda)}{r} \right] q \cdot d\Omega.$$

В (14) и (15)

$$r = \sqrt{(x_1 - \eta)^2 + (x_2 - \xi)^2 + x_3^2} \quad (16)$$

есть расстояние между точками $K_1(\eta, \xi)$ и $K(x_1, x_2, x_3)$.

Перемещения произвольной точки $K_0(x_1, x_2, 0)$ граничной плоскости определяются равенствами

$$u_1 = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \iint_{\Omega} \frac{x_1}{r^2} q \cdot d\Omega; \quad u_2 = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \iint_{\Omega} \frac{x_2}{r^2} q \cdot d\Omega; \quad (17)$$

$$u_3 = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega} \frac{q \cdot d\Omega}{r}, \quad (18)$$

где
$$r = \sqrt{(x_1 - \eta)^2 + (x_2 - \xi)^2} \quad (19)$$

есть расстояние между точками $K_1(\eta, \xi)$ и $K_0(x_1, x_2, 0)$.

Используя формулы (8), можно получить выражения для компонент тензора напряжений при действии распределённой нагрузки интенсивности $q = q(\eta, \xi)$.

Давление между двумя соприкасающимися телами (задача Герца). Имея формулы для вычисления перемещений и напряжений, возникающих в упругом изотропном теле, ограниченном плоскостью, можно теперь подойти к решению весьма важной инженерной задачи о распределении напряжений у места соприкосновения двух прижимаемых друг к другу упругих изотропных тел.

Пусть два однородных изотропных тела I и II с различными упругими константами соприкасаются в точке O , расположенной на гладких участках их поверхностей (рис. 4).

В точке касания O , не являющейся особой точкой поверхностей тел, имеет место общая касательная плоскость ML .

Обозначим координатные оси с началом в точке касания O для тела I через x_1, y_1, z_1 , а для тела II – через x_2, y_2, z_2 . И пусть общая система координат в плоскости касания есть x, y (см. рис. 4 и рис. 5).

Положительное направление осей z_1 и z_2 совместим с внутренними нормальными тел I и II (рис. 4).

Оси x_1, y_1 и x_2, y_2 направлены по линиям пересечения общей касательной плоскости ML с главными нормальными сечениями поверхностей тел I и II (рис. 5).

Пусть теперь тела сдавливаются по нормали к общей касательной плоскости ML так, что результирующая сила между ними равна N (рис. 4). При этом части обоих тел вблизи точки касания O будут деформироваться. Тогда тела будут уже касаться не в одной точке, а по некоторым малым, но конечным участкам их поверхностей.

Участок поверхности касания называется площадкой контакта, а ограничивающая её кривая – контуром площадки контакта.

Направления общих осей x, y определяется углом ω_1 (рис. 5), который рассчитывается из следующего равенства

$$\operatorname{tg} 2\omega_1 = \frac{(k_{21} - k_{22}) \sin 2\omega}{k_{11} - k_{12} + (k_{21} - k_{22}) \cos 2\omega}. \quad (20)$$

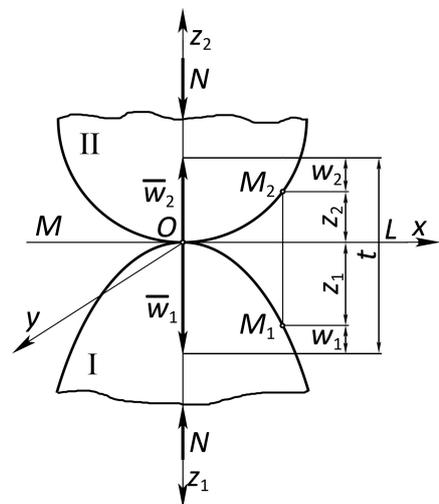


Рис. 4 – К задаче Герца

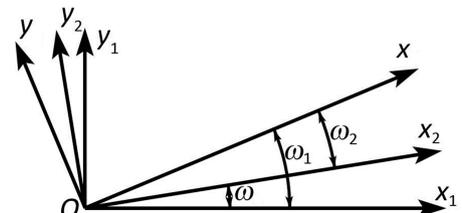


Рис. 5 – Система координат в точке касания тел I и II

Здесь ω – известный угол между осями x_1 и x_2 . Что касается кривизн главных нормальных сечений недеформированных поверхностей тел I и II вблизи точки касания, то они легко рассчитываются по формулам

$$k_{11} = \frac{\partial^2 f_1(x_1, y_1)}{\partial x_1^2} \Big|_0; \quad k_{12} = \frac{\partial^2 f_1(x_1, y_1)}{\partial y_1^2} \Big|_0; \quad k_{21} = \frac{\partial^2 f_2(x_2, y_2)}{\partial x_2^2} \Big|_0; \quad k_{22} = \frac{\partial^2 f_2(x_2, y_2)}{\partial y_2^2} \Big|_0, \quad (21)$$

где $f_1(x_1, y_1) = z_1$ и $f_2(x_2, y_2) = z_2$ – уравнения криволинейных недеформированных поверхностей тел I и II вблизи точки касания.

Герц показал, что при таком направлении общих осей x и y , расстояние между двумя точками M_1, M_2 до сдавливания тел будет определяться равенством

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2, \quad (22)$$

где
$$A = \frac{1}{2}(k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}) \sin^2 \frac{\beta}{2}; \quad (23)$$

$$B = \frac{1}{2}(k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}) \cos^2 \frac{\beta}{2}. \quad (24)$$

Из (23) и (24) видно, что величины A и B имеют одинаковый знак. Поэтому, проекции на общую касательную плоскость ML (рис. 4) точек недеформированных поверхностей соприкасающихся тел с одним и тем же существенно положительным расстоянием

$$z_1 + z_2 = C \quad (25)$$

лежат на одном эллипсе, определяемом, согласно (25) и (22), уравнением

$$Ax^2 + By^2 = C, \quad (26)$$

где A и B также будут положительными.

Уравнение (26) с учётом (25) запишется так

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2 = C = \text{const}. \quad (27)$$

Заметим, что размеры эллипса данного уравнения (26) или (27) будут зависеть только от угла β , который определяется из равенства

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{22} - k_{21})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22}) \cos 2\omega}}{k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}}. \quad (28)$$

Если теперь оба тела (рис. 4) прижать друг к другу силой N , направленной по их общей нормали, то в них возникнут упругие деформации. Они станут уже соприкасаться по некоторой поверхности, называемой площадкой контакта, а ограничивающая её кривая – контуром площадки контакта.

Упругие перемещения точек M_1 и M_2 в направлении осей z_1 и z_2 , происходящие вследствие деформации частей тел вблизи точки касания O , обозначим через w_1 и w_2 , а перемещение точек в начале координат – через \bar{w}_1 и \bar{w}_2 (рис. 4).

Очевидно, что величина $t = \bar{w}_1 + \bar{w}_2$ представляет собой сближение соприкасающихся тел в результате их сдавливания силой N , при котором расстояние между точками M_1 и M_2 уменьшается на величину $t - (w_1 + w_2)$, то есть будет равно

$$z_1 + w_1 + z_2 + w_2 = t \quad \text{или} \quad z_1 + z_2 = t - (w_1 + w_2). \quad (29)$$

Таким образом, если принять во внимание (22), то из (29) будем иметь для точек площадки контакта следующее равенство

$$w_1 + w_2 = t - Ax^2 - By^2. \quad (30)$$

Для точек вне площадки контакта имеем неравенство

$$z_1 + w_1 + z_2 + w_2 > t \quad \text{или} \quad z_1 + z_2 > t - (w_1 + w_2).$$

Это неравенство с учётом (22) принимает вид

$$w_1 + w_2 > t - Ax^2 - By^2. \quad (31)$$

Поскольку размеры площадки контакта весьма малы по сравнению с общими размерами соприкасающихся тел, последние можно представить упругими полупространствами, нагруженными давлением интенсивности $q = q(\eta, \xi)$, которое распределено по площадке Ω , как это показано на рис. 3.

Пренебрегая силами трения по площадке контакта и обозначая для тела I упругие константы через E_1, ν_1 , а для тела II – через E_2, ν_2 , перемещения w_1 и w_2 находим по формуле (18) и равенство (30) приводим к виду

$$(k_1 + k_2) \cdot u_0 = t - Ax^2 - By^2, \quad (32)$$

где
$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1}; \quad k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2}; \quad u_0 = \iint_{\Omega} \frac{q \cdot d\Omega}{r}. \quad (33)$$

Здесь u_0 есть функция, которая представляет собой потенциал простого слоя, нанесённого на площадку контакта Ω с плотностью $q = q(\eta, \xi)$.

Таким образом, решение контактной задачи Герца свелось к отысканию такого закона распределения давлений $q = q(\eta, \xi)$ по контактной площадке Ω , при котором будет удовлетворено интегральное уравнение (32). Что касается величин A и B , входящих в правую часть уравнения (32), то они находятся из геометрических соображений по заданному виду (по заданной геометрии) недеформированных поверхностей тел I и II (смотри формулы (21), (20), (23) и (24)).

Вся трудность дальнейшего решения задачи заключается в определении величины $q = q(\eta, \xi)$. Эта задача была решена Герцем, который показал, что контур давления можно в общем случае принять за эллипс, полуоси которого по направлению совпадают с полуосями эллипса (27), будучи вообще отличны от них по величине. Далее он показал, что величина $q = q(\eta, \xi)$ даётся ординатами трёхосного эллипсоида.

Если $q = q(\eta, \xi)$ есть плотность простого слоя, расположенного на поверхности площадки контакта, то функция u_0 , определяемая по формуле (33), есть потенциал этого простого слоя.

Из (32) имеем

$$u_0 = \frac{1}{k_1 + k_2} (t - Ax^2 - By^2).$$

Согласно этому интегральному уравнению, потенциал u_0 в точках площадки контакта Ω представляет квадратичную функцию координат. Вместе с этим потенциал для внутренних точек однородного эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

с плотностью $\rho_0 = \text{const}$ является, как известно, также квадратичной функцией координат и определяется выражением [8]

$$u = \pi abc \rho_0 \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda_0} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda_0} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda_0} \right) \frac{d\lambda_0}{\sqrt{(a^2 + \lambda_0)(b^2 + \lambda_0)(c^2 + \lambda_0)}}. \quad (34)$$

Поэтому, за потенциал u_0 можно принять потенциал однородного эллипсоида, размер с которого в направлении оси z стремится к нулю, а плотность ρ_0 неограниченно возрастает, так что величина произведения $c\rho_0$ остаётся постоянной, то есть $c\rho_0 = \text{const}$. В пределе получаем простой слой, распределённый по поверхности эллипса с полуосями a и b , то есть по площадке контакта Ω , ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Плотность этого слоя $q(\eta, \xi)$ будет равна той части массы эллипсоида, которая заключена в призме, имеющей единичное основание и высоту

$$2z = 2c \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{a^2} - \frac{\xi^2}{b^2}},$$

то есть

$$q(\eta, \xi) = 2c\rho_0 \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{a^2} - \frac{\xi^2}{b^2}}. \quad (35)$$

Очевидно, что сила N , с которой сдавливаются тела, будет равна массе эллипсоида, то есть

$$N = \frac{4}{3} \pi abc \rho_0. \quad (36)$$

Отсюда имеем

$$c\rho_0 = \frac{3N}{4\pi ab} = \text{const}. \quad (37)$$

Подставляя (37) в (35), получим

$$q = q_0 \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{a^2} - \frac{\xi^2}{b^2}}, \quad (38)$$

где

$$q_0 = 3N/(2\pi ab). \quad (39)$$

Уравнение (38) даёт закон распределения давления $q = q(\eta, \xi)$ по поверхности площадки контакта обоих тел. Мы видим, что давление q есть ордината трёхосного эллипсоида с полуосями a, b, q_0 . Уравнение этого эллипсоида запишется так

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{q_0^2} = 1.$$

Подставив в равенство (32) вместо потенциала простого слоя u_0 потенциал эллипсоида (34) с учётом (37), а затем, переходя к пределу, когда $c \rightarrow 0$ ($z = 0$), получим

$$(k_1 + k_2) \cdot \frac{3}{4} N \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda_0} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda_0} \right) \frac{d\lambda_0}{\sqrt{(a^2 + \lambda_0)(b^2 + \lambda_0)\lambda_0}} = t - Ax^2 - By^2.$$

Это уравнение должно выполняться тождественно при всех значениях x, y внутри площадки контакта, поэтому должны иметь место равенства

$$t = \frac{3}{4} N(k_1 + k_2) \int_0^\infty \frac{d\lambda_0}{\sqrt{(a^2 + \lambda_0)(b^2 + \lambda_0)\lambda_0}}; \quad (40)$$

$$A = \frac{3}{4} N(k_1 + k_2) \int_0^\infty \frac{d\lambda_0}{(a^2 + \lambda_0) \sqrt{(a^2 + \lambda_0)(b^2 + \lambda_0)\lambda_0}}; \quad (41)$$

$$B = \frac{3}{4} N(k_1 + k_2) \int_0^\infty \frac{d\lambda_0}{(b^2 + \lambda_0) \sqrt{(a^2 + \lambda_0)(b^2 + \lambda_0)\lambda_0}}. \quad (42)$$

Уравнения (41) и (42) позволяют определить полуоси a и b эллиптической площадки контакта по заданной силе N в зависимости от A и B , определяемых геометрией недеформированных поверхностей соприкасающихся тел.

Получив a и b , из уравнения (40) находим величину сближения тел t при заданной силе N .

Вводя новую переменную φ_0 с помощью соотношения

$$\lambda_0 = b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0, \quad (43)$$

а также используя эксцентриситет контура эллиптической площадки контакта

$$k = \sqrt{1 - k_0^2}, \quad (44)$$

где

$$k_0 = b/a < 1, \quad (45)$$

и получив

$$k_0^2 = 1 - k^2, \quad (46)$$

равенства (40)-(42) можно представить в таком окончательном виде

$$t = \frac{3}{2\pi} \beta_0 \frac{N}{a} F(k); \quad A = \frac{3}{2\pi} \beta_0 \frac{N}{a^3} \frac{F(k) - E(k)}{k^2}; \quad B = \frac{3}{2\pi} \beta_0 \frac{N}{b^3} \cdot \frac{k_0 [E(k) - k_0^2 F(k)]}{k^2}. \quad (47)$$

В равенствах (47) введены обозначения

- полный эллиптический интеграл первого рода

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi_0}{\sqrt{\cos^2 \varphi_0 + k_0^2 \sin^2 \varphi_0}}; \quad (48)$$

- полный эллиптический интеграл второго рода

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_0} \cdot d\varphi_0; \quad (49)$$

- новый параметр

$$\beta_0 = \pi(k_1 + k_2) = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}. \quad (50)$$

В соответствии с (47), если принять во внимание (44)-(46), будем иметь

$$A + B = \frac{3}{2\pi} \beta_0 \frac{N}{ab^2} E(k); \quad B - A = \frac{3}{2\pi} \beta_0 \frac{N}{ab^2} \cdot \left[\left(\frac{2}{k^2} - 1 \right) E(k) + 2 \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) F(k) \right], \quad (51)$$

откуда

$$\cos \beta = \frac{B - A}{B + A} = \frac{2}{k^2} \left[1 - \frac{F(k)}{E(k)} \right] + 2 \frac{F(k)}{E(k)} - 1. \quad (52)$$

Из (46) с учётом (45) имеем

$$b^2 = a^2 (1 - k^2). \quad (53)$$

Подставляя (53) в первое равенство (51), получим формулу для определения наибольшей полуоси контура эллиптической площадки контакта

$$a = m \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{\beta_0}{\kappa} N}. \quad (54)$$

А с учётом (23) и (24) можно показать, что

$$m = \sqrt[3]{\frac{2E(k)}{\pi(1-k^2)}}; \quad \kappa = 2(A + B) = k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}. \quad (55)$$

Внося (54) в (53), найдём формулу для определения малой полуоси эллиптической площадки контакта

$$b = n \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{\beta_0}{\kappa} N}, \quad (56)$$

где

$$n = m \sqrt{1 - k^2}. \quad (57)$$

Подставляя (54) в первую формулу (47), получаем формулу для определения величины сближения тел

$$t = \frac{F(k)}{\pi m} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \beta_0^2 \kappa N^2}. \quad (58)$$

Закон распределения давления $q = q(\eta, \xi)$ по площадке контакта определяется в соответствии с формулами (38), (39), из которых следует, что наибольшее давление имеет место в центре площадки контакта при $\eta = \xi = 0$ и будет равно, если принять во внимание (54) и (56)

$$q_{\max} = q_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{N}{\pi ab} = \frac{1}{\pi mn} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{\kappa}{\beta_0} \right)^2} N. \quad (59)$$

Давление в произвольной точке площади контакта можно представить, исходя из (39), в таком виде

$$q = q_0 \zeta, \quad (60)$$

где

$$\zeta = \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{a^2} - \frac{\xi^2}{b^2}}. \quad (61)$$

Из формул (54), (56), (58) и (59) следует, что полуоси a и b контура эллипса, величина сближения тел t и давление q_0 нелинейно зависят от сдвигавшей силы N , причём a , b и q_0 пропорциональны $N^{1/3}$, а величина сближения t пропорциональна $N^{2/3}$.

Отметим, что вычислительные процедуры, связанные с решением задачи Герца, можно существенно сократить, если воспользоваться таблицей Г. Виттемора и С. Петренко, которая позволяет сразу определить коэффициенты m и n в зависимости от величины β (табл. 1).

В качестве примера рассмотрим лишь решение одной, но важной для нас, задачи Герца.

Пусть сдвигаваемые силой N тела I и II имеют сферические поверхности с радиусами R_1 и R_2 (рис. 6).

В этом случае уравнениями сферических тел до их деформации будут

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - R_1)^2 &= R_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + (z_2 - R_2)^2 &= R_2^2 \end{aligned} \right\} \text{или} \left. \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= 2z_1 R_1 - z_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 &= 2z_2 R_2 - z_2^2 \end{aligned} \right\}.$$

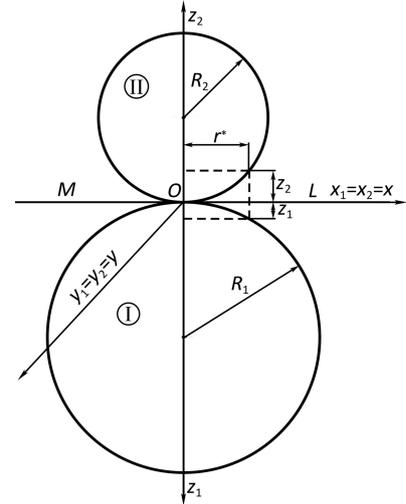


Рис. 6 – Сдвигаваемые сферические поверхности

Наконец, отбрасывая здесь члены высших порядков малости z_1^2 и z_2^2 , будем иметь следующие уравнения для недеформированных сферических поверхностей вблизи точки касания

$$z_1 = \frac{1}{2R_1} (x_1^2 + y_1^2); \quad z_2 = \frac{1}{2R_2} (x_2^2 + y_2^2).$$

Таблица 1.

β, \dots°	m	n	β, \dots°	m	n
18	4,156	0,394	55	1,611	0,678
20	3,850	0,410	60	1,486	0,717
25	3,152	0,456	65	1,378	0,759
30	2,731	0,493	70	1,284	0,802
35	2,397	0,530	75	1,202	0,846
40	2,136	0,567	80	1,128	0,893
45	1,926	0,604	85	1,061	0,944
50	1,754	0,641	90	1,000	1,000

Тогда кривизны недеформированных поверхностей соприкасающихся тел I и II вблизи точки касания будут равны

$$k_{11} = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} \Big|_0 = k_{12} = \frac{\partial^2 z_1}{\partial y_1^2} \Big|_0 = \frac{1}{R_1}; \quad k_{21} = \frac{\partial^2 z_2}{\partial x_2^2} \Big|_0 = k_{22} = \frac{\partial^2 z_2}{\partial y_2^2} \Big|_0 = \frac{1}{R_2}$$

и, стало быть,

$$\kappa = k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22} = \frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_2} = \frac{2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}.$$

Вычислим величину $\cos\beta$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{22} - k_{21})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22})\cos 2\omega}}{k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}} = 0$$

и, таким образом, $\beta = \pi/2$.

Согласно таблице Г. Виттемора и С. Петренко при $\beta = \pi/2$ имеем $m = n = 1$. Тогда из равенства $n = m\sqrt{1 - k^2}$ следует, что $k = 0$.

Определим величины полуосей a и b контурного эллипса

$$a = b = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{\beta_0}{\kappa} N} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{\beta_0 R_1 R_2}{2(R_1 + R_2)} N} = 0,9086 \sqrt[3]{\beta_0 N \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}},$$

то есть, контур площадки контакта, как и следовало ожидать, оказывается окружностью радиуса a .

По таблицам полных эллиптических интегралов [9] при $k = 0$ находим

$$F(0) = E(0) = \pi/2.$$

Тогда для величины сближения тел t и наибольшего давления q_0 будем иметь

$$t = \frac{\pi}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \beta_0^2 \cdot \frac{2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} N^2} = 0,8255 \sqrt[3]{(\beta_0 N)^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}};$$

$$q_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{N}{\beta_0^2} \cdot \frac{4(R_1 + R_2)^2}{(R_1 R_2)^2}} = 0,5784 \sqrt[3]{\frac{N}{\beta_0^2} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right)^2}.$$

В частном случае, когда материалы сферических тел I и II одинаковые, то $E_1 = E_2 = E$ и $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Пусть $\nu = 0,3$. Тогда согласно (50)

$$\beta_0 = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} = \frac{2(1 - 0,3^2)}{E} = \frac{1,82}{E}$$

получаем

$$a = 1,109 \sqrt[3]{\frac{N}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}; \quad t = 1,231 \sqrt[3]{\left(\frac{N}{E}\right)^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}; \quad q_0 = 0,388 \sqrt[3]{NE^2 \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right)^2}.$$

Отметим, что в случае, когда контур площадки контакта двух сдавливаемых тел есть окружность, то $A = B$ (это следует из равенств (23) и (24), если учесть, что для рассматриваемого случая $\beta = \pi/2$) и уравнение (32) с учётом (33) принимает вид

$$(k_1 + k_2) \iint_{\Omega} \frac{qd\Omega}{r} = t - A(x^2 + y^2) \quad \text{или} \quad (k_1 + k_2) \iint_{\Omega} \frac{qd\Omega}{r} = t - A(r^*)^2, \quad (62)$$

где $r^* = \sqrt{x^2 + y^2}$ (63)

представляет собой расстояние рассматриваемой точки от начала координат O (рис. 6).

Таким образом, решение контактной задачи Герца, когда контур площадки контакта двух сдавливаемых тел есть окружность, свелось к отысканию такого закона распределения по круговой площадке контакта, при котором будет удовлетворено уравнение (62)

Далее воспользуемся следующим приемом для вычисления $\iint_{\Omega} \frac{qd\Omega}{r}$.

Пусть m_*m_* есть контур той площадки, по которой определяется давление q (рис. 7).

Возьмём точку A , для которой нужно вычислить двойной интеграл $\iint_{\Omega} \frac{qd\Omega}{r}$, вне контура m_*m_* .

При вычислении двойного интеграла, нагрузку, приходящуюся на каждый элемент $d\Omega$ площади m_*m_* , придётся делить на расстояние r элемента $d\Omega$ от точки A и полученные таким

образом результаты суммировать. Суммирование должно быть распространено на все элементы площади m_*m_* .

Для упрощения вычислений представим себе, что в каждой точке площади m_*m_* по нормали к ней отложен отрезок h , пропорциональный соответствующей интенсивности нагрузки q . Тогда концы этих отрезков расположатся на некоторой поверхности. Эта поверхность характеризует закон распределения q . Если теперь через точку A провести плоскость, перпендикулярную к площади m_*m_* , то линия пересечения (пунктир на рис. 7) этой плоскости с поверхностью будет характеризовать закон распределения давления вдоль прямой AB (AB – линия пересечения проведённой через точку A плоскости с площадью m_*m_*).

Линиями AB и AC и дугами окружностей r и $r + dr$ выделим из площади m_*m_* элемент $d\Omega = rd\alpha dr$. Приходящаяся на этот элемент нагрузка будет

$$qrd\alpha dr = C_0hrd\alpha dr,$$

где h – соответствующая ордината, построенной нами над площадью m_*m_* поверхности; C_0 – коэффициент пропорциональности, на которой надо умножить h , чтобы получить q , то есть $C_0h = q$.
Тогда

$$\iint_{\Omega} \frac{qd\Omega}{r} = \iint_{\alpha r} \frac{C_0hrd\alpha dr}{r} = \iint_{\alpha r} C_0hd\alpha dr = \int_{\alpha} C_0d\alpha \cdot \int_r hdr$$

или

$$\iint_{\Omega} \frac{qd\Omega}{r} = \int_{\alpha} FC_0d\alpha, \tag{64}$$

где F – площадь, заштрихованная на рис. 7 между пунктирной линией и линией AB .

Перейдём теперь к отысканию распределения давления q в том случае, когда поверхность контура сдавливаемых тел имеет круговой контур. Распределение давлений в этом случае будет симметрично относительно начала координат O и q будет функцией только $r^* = \sqrt{x^2 + y^2}$. Функция q должна быть подобрана таким образом, чтобы было выполнено уравнение (62). Покажем, что этому можно удовлетворить, допустив, что давление в любой точке поверхности контакта пропорционально ординате полусферы, построенной на поверхности соприкосновения.

Обозначим через R_z радиус контура поверхности контакта (рис. 8) и через q_0 – интенсивность давления в точке O .

Коэффициент пропорциональности C_0 , которым мы пользуемся при построении полусферы, определится из условия $q_0 = R_zC_0$, откуда $C_0 = q_0/R_z$.

Вычислим двойной интеграл $\iint_{\Omega} \frac{qd\Omega}{r}$ для какой либо точки A , расположенной на расстоянии r^* от начала координат (рис. 8). Это, как было показано выше, равносильно вычислению

интеграла $\int_{\alpha=0}^{\pi} FC_0d\alpha$, то есть

$$\iint_{\Omega} \frac{qd\Omega}{r} = \int_0^{\pi} FC_0d\alpha = \int_0^{\pi} \frac{q_0}{R_z} Fd\alpha = \frac{q_0}{R_z} \int_0^{\pi} Fd\alpha,$$

где F – есть площадь заштрихованного полукруга, изображённого на рис. 8.

Согласно рис. 8 имеем

$$F = \frac{\pi l^2}{2} = \frac{\pi}{2} [R_z^2 - (r^*)^2 \sin^2 \alpha].$$

Тогда

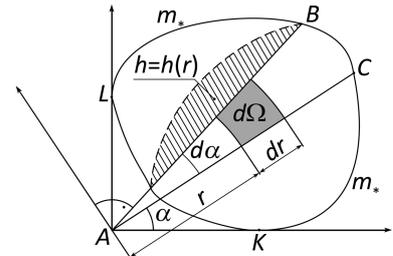


Рис. 7 – К вычислению двойного интеграла

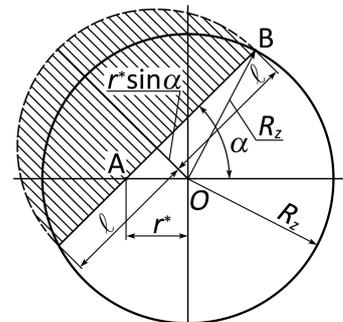


Рис. 8 – Поверхность контакта сдавливаемых тел с круговым контуром

$$\iint_{\Omega} \frac{q d\Omega}{r} = \frac{\pi q_0}{2R_z} \int_0^{\pi} [R_z^2 - (r^*)^2 \sin^2 \alpha] d\alpha = \frac{\pi^2 q_0}{4R_z} [2R_z^2 - (r^*)^2].$$

Подставляя этот результат в уравнение (62), будем иметь

$$(k_1 + k_2) \frac{\pi^2 q_0}{4R_z} [2R_z^2 - (r^*)^2] = t - A(r^*)^2. \quad (65)$$

Поскольку полученное уравнение должно выполняться тождественно при всех значениях r^* внутри площадки контакта, то должны иметь место равенства

$$t = (k_1 + k_2) \frac{\pi^2 q_0 2R_z^2}{4R_z} = (k_1 + k_2) \frac{\pi^2 q_0 R_z}{2}; \quad (66)$$

$$A = (k_1 + k_2) \frac{\pi^2 q_0}{4R_z}. \quad (67)$$

Величина q_0 может быть определена из того условия, что сумма всех давлений q по поверхности контакта должна равняться той силе N , с которой сдавливаются тела I и II. Принимая во внимание закон распределения q , получаем

$$N = \int q dl = \frac{2}{3} q_0 \pi R_z^2 \quad \text{или} \quad q_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{N}{\pi R_z^2}.$$

Таким образом, при сдавливании тел I и II, имеющих криволинейные поверхности, интенсивность давления в центре площадки контакта в полтора раза превосходит среднее значение давления.

Твёрдость и модуль упругости резин. Пусть цилиндрическое тело I с радиусом основания R_z вдавливается силой N в тело II, которое представляет собой полубесконечное пространство, ограниченное плоскостью (рис. 9).

Пусть $E_1 \gg E_2$ настолько, что можно считать тело I абсолютно жёстким по сравнению с телом II, которое обладает упругими свойствами. Иными словами, полагаем, что (смотри формулы (33))

$$E_1 = \infty, \quad k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} = 0. \quad (68)$$

Здесь E_1 и ν_1 – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона изотропного материала тела I.

Поскольку в рассматриваемом случае давления по круговой площадке контакта будут равномерно распределены, то

$$q_0 = \frac{N}{\pi R_z^2}. \quad (69)$$

Герц показал (66), что в случае, когда контур площадки контакта двух сдавливаемых упругих изотропных тел есть окружность, то сближение этих тел (рис. 4) определяется равенством

$$t = (k_1 + k_2) \frac{\pi^2 q_0 R_z}{2}, \quad (70)$$

где согласно (33)

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1}, \quad k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2}. \quad (71)$$

Здесь E_2 и ν_2 – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона изотропного материала тела II.

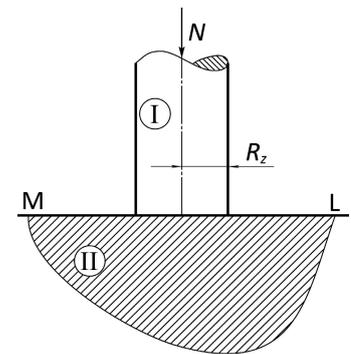


Рис. 9 – Вдавливание цилиндрического тела I в изотропное тело II

Таким образом, для рассматриваемой нами задачи из (70), с учётом (68), (69) и (71), будем иметь

$$t = \frac{N(1 - \nu_2^2)}{2R_2 E_2} \quad (72)$$

В формуле (72) параметр t следует рассматривать как глубину проникновения (погружения) абсолютно жёсткого цилиндрического тела под воздействием силы N в толстое плоское упругое изотропное тело II.

Под твёрдостью резины понимают сопротивление резины проникновению в неё более жёсткого тела, имеющего определённую форму и нагруженного определённой нагрузкой.

Будем определять твёрдость резины с помощью твердомера Шора, который показывает твёрдость резины в безразмерных единицах А Шора.

Однако, в дальнейшем, чтобы не было путаницы с принятыми уже обозначениями, будем показатель твёрдости резины на твердомере Шора обозначать через H_A .

Метод определения показателя H_A твёрдости резины на твердомере Шора изложен в ГОСТ 263-75 [4].

Твердомер Шора имеет (рис. 10) индентор 1, который представляет собой иглу, выполненную из закалённой стали и имеющую формы и размеры, указанные на рисунке.

Из рисунка 10 видно, что индентор 1 оканчивается наконечником в виде усечённого конуса и выступает из корпуса твердомера через отверстие в шайбе 2 на величину $a = 2,5^{+0,04}$ мм.

Верхним концом индентор упирается в пружину. Усилие N , с которым пружина действует на индентор, соответствует уравнению [4]

$$N = 7,66H_A + 56, \quad (73)$$

где H_A – показатель твёрдости на твердомере Шора (безразмерная величина);

56 – усилие пружины при отсутствии проникновения индентора в образец, гс;

7,66 – коэффициент, гс.

Твердомер Шора при испытании резины устанавливается на образец этой резины, который располагается на плоской неподвижной твёрдой опоре так, чтобы шайба 2 (рис. 10) соприкасалась с поверхностью образца при нажатии на головку прибора. При этом индентор погружается (проникает) в образец резины на некоторую глубину t до тех пор, пока сила выталкивания его из резины не уравновесится давлением деформированной пружины. Чем меньше сила выталкивания, тем меньше деформируется пружина и тем глубже погружается индентор.

С движением индентора связано перемещение зубчатой рейки, поворачивающей шестерню, на оси которой находится стрелка. Стрелка показывает на шкале прибора твёрдость резины H_A в условных безразмерных единицах от 0 до 100.

Если давление на пружину равно или менее 56 гс (начальное усилие пружины), то она не сжимается и индентор погружается в образец резины на полную глубину $t = a = 2,5$ мм, а стрелка прибора показывает по шкале 0.

Если давление на пружину 822 гс, то пружина сжимается на полную длину индентора ($t = a = 2,5$ мм), который не погружается в образец, и твёрдость образца $H_A = 100$ ($N = 7,66 \cdot 100 + 56 = 822$ гс).

Поскольку между силой пружины N и твёрдостью резины H_A имеется линейная зависимость (73), а

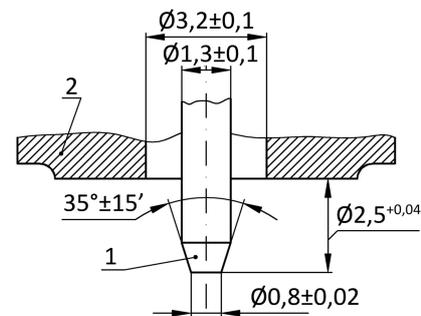


Рис. 10 – Индентор и шайба твердомера Шора

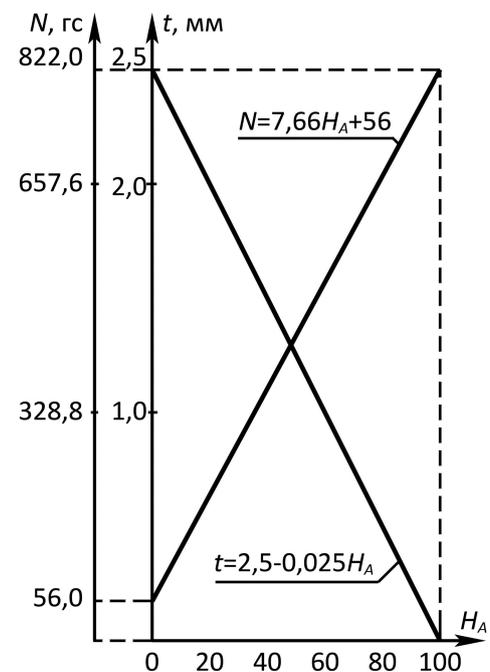


Рис. 11 – Графическое изображение функциональной зависимости параметров N и t от H_A для шинных резин

все резины шин в рабочем диапазоне нагрузок на шину имеют, как нами было установлено [1-3], практически линейные диаграммы растяжения, то глубину погружения t индентора в резину шины и её твёрдость H_A также можно связать линейной зависимостью

$$t = 2,5 - 0,025H_A, \quad (74)$$

где t – величина глубины погружения индентора в резину, мм.

На рис. 11 для наглядности дано графическое изображение функций (73) и (74).

Таким образом, сущность метода определения твёрдости H_A резины по Шору заключается в измерении сопротивления резины погружению в неё стального индентора.

Ранее мы получили формулу (72), устанавливающую связь глубины погружения (вдавливания) t абсолютно жёсткого цилиндрического тела с радиусом основания R_z под воздействием вдавливающей силы N в толстое плоское упругое изотропное тело. Эту формулу, применительно к рассматриваемой задаче, можно переписать так

$$t = \frac{N(1 - \nu_g^2)}{2R_z E_g}, \quad (75)$$

где E_g и ν_g – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона резины.

Решая уравнение (75) относительно E_g и подставляя в полученное выражение (73), (74), переводя предварительно в формулах (73) и (74) их числа в метрические единицы измерения кгс и см, будем иметь

$$E_g = \frac{(7,66 \cdot 10^{-3} H_A + 5,6 \cdot 10^{-2})(1 - \nu_g^2)}{2R_z (2,5 \cdot 10^{-1} - 2,5 \cdot 10^{-3} H_A)}. \quad (76)$$

Полагая, на основании [3], коэффициент Пуассона резин пневматических шин $\nu_g = 0,49$, из (76) будем иметь

$$E_g = \frac{5,820834 \cdot 10^{-3} H_A + 4,25544 \cdot 10^{-2}}{R_z (5 \cdot 10^{-1} - 5 \cdot 10^{-3} H_A)}. \quad (77)$$

Поскольку рабочая часть индентора твердомера Шора (рис. 10) имеет форму усечённого конуса с минимальным радиусом нижнего основания $R_1 = 0,04$ см и максимальным радиусом верхнего основания $R_2 = 0,065$ см, а формула (77) предназначена, вообще говоря, для индентора цилиндрической формы, то для использования формулы (77) заменим усечённый конус индентора прибора Шора гипотетическим индентором цилиндрической формы с осреднённым радиусом

$$R_z = \frac{R_1 + R_2}{2} = 5,25 \cdot 10^{-2} \text{ см.}$$

Наконец, подставляя это значение R_z в (77) и проведя несложные математические преобразования, будем окончательно иметь следующую формулу для вычисления модуля упругости резины E_g по известной её твёрдости H_A

$$E_g = \frac{22,174605 \cdot H_A + 162,112}{100 - H_A} \quad (\text{кгс/см}^2). \quad (78)$$

В табл. 2 представлены результаты сопоставления экспериментально найденных и рассчитанных по формуле (78) и известной твёрдости H_A значений модулей упругости резин, используемых в деталях шины 30,5L32 мод. Ф-136.

Из табл. 2 видно, что формула (78) даёт для инженерной практики весьма хорошие результаты, ею можно пользоваться для определения модулей упругости резин по известной их твёрдости H_A .

Выразим количественную характеристику E_g формулы (78) в международной системе единиц (СИ). Для этого достаточно вспомнить, что

$$1 \text{ кгс/см}^2 = 9,80665 \cdot 10^{-2} \text{ МПа.} \quad (79)$$

Принимая во внимание (79), из (78) будем иметь

$$E_g = \frac{2,1745859 \cdot H_A + 15,897756}{100 - H_A} \quad (\text{МПа}). \quad (80)$$

Ниже дана табл. 3 для потенциального использования, в которой приводятся значения модулей упругости резин E_g в зависимости от их твёрдости H_A . Эти значения были рассчитаны по формулам (78) и (80).

Таблица 2 – Сопоставление экспериментально найденных и рассчитанных по формуле (78) значений модулей упругости резин, используемых в основных деталях пневматической шины 30,5L32 мод. Ф-136

Шифр	Резиновая смесь	Назначение	Измеренная твёрдость H_A	Модуль упругости E_g , кг/см ²		Отклонение, %
				экспериментальный [10]	расчётный	
4и8337	70СКИ-3 + 30СКД + 55ПМ105	Протектор и боковина	70	57,1	57,144480	-0,08
2и8339	100СКИ-301 + 30ПМ50 + 15ДГ100	Брекерная резина, последние (разряжённые) слои каркаса, прослойка на низ брекера	67	49,6	49,933651	-0,67
2и8338	100СКИ-3 + 10РКТ + 40ПМ50	Основные слои каркаса	64	44,1	43,924630	0,40
3э-69	100СКИ-3 + 40ПМ50 + 20ПМ105	Наполнительный шнур борта	65	46,0	45,813180	0,41
3э-70	100СКИ-3 + 50ПМ50 + 20ПМ105	Изоляция проволок бортового кольца	74	68,0	69,347415	-1,94

Таблица 3 – Зависимость модулей упругости резин E_g от их твёрдости H_A по Шору

Твёрдость H_A по Шору	Метрические единицы измерения		Международные единицы измерения (СИ)		Твёрдость H_A по Шору	Метрические единицы измерения		Международные единицы измерения (СИ)	
	Глубина вдавливания t , см	Модуль упругости E_g , кгс/см ²	Глубина вдавливания $t \cdot 10^3$, м	Модуль упругости E_g , МПа		Глубина вдавливания t , см	Модуль упругости E_g , кгс/см ²	Глубина вдавливания $t \cdot 10^3$, м	Модуль упругости E_g , МПа
0	0,2500	1,621120000	2,500	0,1589775600	55	0,1125	30,704783889	1,125	3,0111106778
10	0,2250	4,265089444	2,250	0,4182623889	60	0,1000	37,314707500	1,000	3,6593227500
15	0,2125	5,820365588	2,125	0,5707828765	62	0,0950	40,445723947	0,950	3,9663705737
20	0,2000	7,570051250	2,000	0,7423684250	64	0,0900	43,924631111	0,900	4,3075348222
25	0,1875	9,553028333	1,875	0,9368320467	65	0,0875	45,813180714	0,875	4,4927382714
30	0,1750	11,819287857	1,750	1,1590761857	67	0,0825	49,933652576	0,825	4,8968185242
35	0,1625	14,434202692	1,625	1,4155117308	70	0,0750	57,144478333	0,750	5,6039589667
40	0,1500	17,484936667	1,500	1,7146865333	74	0,0650	69,347414231	0,650	6,8006581769
41	0,1475	18,157132288	1,475	1,7806064051	75	0,0625	73,008295000	0,625	7,1596679400
42	0,1450	18,852507069	1,450	1,8487993759	80	0,0500	96,804020000	0,500	9,4932314000
43	0,1425	19,572280965	1,425	1,9193850825	85	0,0375	136,463561667	0,375	13,3825038333
44	0,1400	20,317761071	1,400	1,9924917071	90	0,0250	215,782645000	0,250	21,1610487000
45	0,1375	21,090349545	1,375	2,0682567545	95	0,0125	453,739895000	0,125	44,4966833000
50	0,1250	25,416845000	1,250	2,4925410200	100	0,0000	∞	0,000	∞

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Растеряев, Ю.К. Упругие характеристики и механика деформирования шинных резин и текстильных кордов [Текст] / Ю.К. Растеряев, А.А. Каспаров // НИИ КГШ. – Днепропетровск, 1995. – 38 с. – Деп. в НИИЕЭХИМ 04.12.95. № 88-хп.95.
2. Растеряев, Ю.К. Физико-механические свойства пневматических шин // Геотехническая механика. – Днепропетровск: Полиграфист, 1991. – Вып. 11. – С. 157-179.
3. Растеряев Ю.К., Агальцов Г.Н. Физико-механические свойства шинных материалов (часть первая) // Геотехническая механика. – Днепропетровск: Полиграфист, 2001. – Вып. 28. – С. 112-136.
4. ГОСТ 263-75. Резина. Метод определения твердости А по Шору.
5. DIN 53505. Bestimmung der Schore. – Härte A, 1973.
6. ASTM D676-58T. Tentative Method of Test for Indentation of Rubber by means of a durometer.
7. British Standard Methods of Vulcanized Rubber, № 903 (1950), Parts 20.
8. Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. ОНТИ, 1936. – С. 25-32.
9. Справочник по специальным функциям. – М: Наука, 1979. – С. 401-441.
10. Ю.К. Растеряев. Определение модулей упругости резин сельскохозяйственных пневматических шин. Часть 1. – Днепропетровск: НИИ КГШ, 1984. – С. 33.